Guía de Estudio Detallada: CAPÍTULO 14

El Capítulo 14 se centra en el estudio del **movimiento periódico u oscilación**, una clase de movimiento que se repite una y otra vez, fundamental para comprender fenómenos como las ondas, el sonido, la corriente alterna y la luz.

Objetivos de Aprendizaje

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir las **oscilaciones** en términos de **amplitud, periodo, frecuencia y frecuencia angular**.
- Cómo efectuar cálculos de **movimiento armónico simple (MAS)**, un tipo de oscilación importante.
- Cómo utilizar los conceptos de **energía** para analizar el MAS.
- Cómo aplicar los conceptos relacionados con el MAS en diferentes situaciones físicas.
- Cómo analizar los movimientos de un **péndulo simple** y un **péndulo físico**.
- Qué determina la duración de una oscilación.
- Cómo una fuerza aplicada a un oscilador en la frecuencia adecuada puede causar una respuesta o **resonancia** muy grande.

---

1. Movimiento Periódico: Descripción de la Oscilación

El movimiento periódico se caracteriza por un cuerpo que posee una **posición de equilibrio estable**. Si se le aleja de esta posición y se suelta, una **fuerza de restitución** actúa para regresarlo al equilibrio. Sin embargo, debido a la energía cinética adquirida, el cuerpo sobrepasa la posición de equilibrio y continúa su movimiento, deteniéndose en el otro lado antes de ser impulsado de nuevo hacia el equilibrio, repitiendo el proceso. Ejemplos incluyen una pelota rodando en un tazón o un péndulo oscilante.

El capítulo se concentra en dos sistemas sencillos: **sistemas resorte-masa** y **péndulos**.

Conceptos Clave:

- **Posición de Equilibrio**: Es donde la fuerza neta sobre el cuerpo es cero.
- **Fuerza de Restitución**: Una fuerza que siempre tiende a regresar el sistema a su posición de equilibrio. Es esencial para que ocurra la oscilación.
- **Amplitud (A)**: La magnitud máxima del desplazamiento respecto al equilibrio. Es siempre positiva y se mide en metros (SI). Un ciclo completo es un viaje de ida y vuelta (ej., de A a -A y de regreso a A).
- **Periodo (T)**: El tiempo que tarda un ciclo completo. Es siempre positivo y su unidad SI es el segundo (s).
- **Frecuencia (f)**: El número de ciclos en la unidad de tiempo. Es siempre positiva y su unidad SI es el **hertz (Hz)**, donde 1 Hz = 1 ciclo/s = 1 s^{-1}.
- **Frecuencia Angular (v)**: Es 2π veces la frecuencia. Se mide en **rad/s**.

Relaciones Fundamentales:

- **Frecuencia y Periodo**: f = 1/T y T = 1/f.
- **Frecuencia Angular**: v = 2π f = 2π /T.

Ejemplo 14.1 (Periodo, Frecuencia y Frecuencia Angular):

- Un transductor ultrasónico con f = 6.7 MHz = 6.7 * 10^6 Hz.
- Cálculo de T = 1/f = 1/(6.7 * 10^6 Hz) = 1.5 * 10^-7 s = 0.15 µs.
- Cálculo de v = 2π f = 2π (6.7 * 10^6 Hz) = 4.2 * 10^7 rad/s.
- **Evaluación**: Vibración muy rápida (f y v grandes, T pequeño).

---

2. Movimiento Armónico Simple (MAS)

El **MAS** es el tipo de oscilación más sencillo, donde la fuerza de restitución (Fx) es **directamente proporcional al desplazamiento (x)** con respecto al equilibrio. Esto ocurre en resortes ideales que obedecen la **ley de Hooke**:

- Fx = -kx
    - k es la **constante de fuerza** (N/m o kg/s^2). El signo menos indica que Fx y x tienen signos opuestos.

La **aceleración (ax)** en el MAS se calcula a partir de la segunda ley de Newton ($a_x = F_x/m$):

- $a_x = -(k/m)x$
    - Esta aceleración **no es constante**, por lo que no se pueden usar las ecuaciones de cinemática de aceleración constante. Un cuerpo en MAS se denomina **oscilador armónico**.

Importancia del MAS: Aunque no todo movimiento periódico es MAS, muchos sistemas pueden aproximarse al MAS para desplazamientos pequeños. Esto permite modelar diversas vibraciones (cristales de cuarzo, diapasones, corriente alterna, vibraciones atómicas).

Relación entre MAS y Movimiento Circular Uniforme (MCU):

- El MAS es la **proyección del MCU sobre un diámetro**.
- El **círculo de referencia** es el círculo en el que se mueve un punto de referencia (Q), cuya proyección (P) coincide con el movimiento del cuerpo oscilante.
- La velocidad angular (v) del punto de referencia Q es igual a la **frecuencia angular (v)** del oscilador.
- La aceleración de la sombra (P) es $a_x = -v^2x$.

Frecuencia Angular, Frecuencia y Periodo en MAS: Al comparar la aceleración del MAS ($a_x = -(k/m)x$) con la del MCU proyectado ($a_x = -v^2x$), se obtiene la relación fundamental:

- $v^2 = k/m$ o $v = \sqrt{(k/m)}$
- **Frecuencia (f)**: $f = (1/(2\pi)) * \sqrt{(k/m)}$
- **Periodo (T)**: $T = 2\pi * \sqrt{(m/k)}$

¡CUIDADO! No confundir frecuencia f (ciclos/s) con frecuencia angular v (rad/s).

Periodo y Amplitud en el MAS:

- Las ecuaciones (14.11) y (14.12) muestran que T y f en el MAS dependen **solamente de la masa (m) y la constante de fuerza (k). No dependen de la**

amplitud (A). Una mayor amplitud implica mayores fuerzas de restitución, lo que compensa la mayor distancia a recorrer, manteniendo el tiempo total del ciclo igual.

- Esto es crucial para instrumentos musicales (como los diapasones que vibran a la misma frecuencia independientemente de la amplitud) y relojes mecánicos.

Ejemplo 14.2 (Frecuencia Angular, Frecuencia y Periodo del MAS):

- Se mide la constante de fuerza de un resorte: $k = -(F_x/x) = -(-6.0\ N)/(0.030\ m) = 200\ N/m$.
- Para una masa de $m = 0.50\ kg$:
  - $v = \sqrt{(k/m)} = \sqrt{(200\ N/m / 0.50\ kg)} = 20\ rad/s$.
  - $f = v/(2\pi) = (20\ rad/s)/(2\pi\ rad/ciclo) = 3.2\ Hz$.
  - $T = 1/f = 1/(3.2\ Hz) = 0.31\ s$.
- Evaluación: La amplitud (0.020 m) no es necesaria para calcular v, f o T, confirmando su independencia de la amplitud.

Desplazamiento, Velocidad y Aceleración en el MAS como funciones del tiempo: Basado en la proyección del MCU, el desplazamiento x del cuerpo oscilante en función del tiempo t es:

- $x(t) = A\cos(vt + \phi)$
  - A es la amplitud.
  - $v = \sqrt{(k/m)}$.
  - ϕ (phi) es el ángulo de fase, que indica el punto del ciclo en $t = 0$.
    - $x_0 = A\cos(\phi)$.
- Velocidad (vx): Derivando $x(t)$:
  - $v_x(t) = -vA\sin(vt + \phi)$
- Aceleración (ax): Derivando $v_x(t)$:
  - $a_x(t) = -v^2A\cos(vt + \phi) = -v^2x$

Determinación de Amplitud (A) y Ángulo de Fase (ϕ) a partir de condiciones iniciales (x_0, v_{0x}):

- $x_0 = A\cos(\phi)$.
- $v_{0x} = -vA\sin(\phi)$.

- **Ángulo de Fase**: $\phi = \arctan(-v_0x / (vx_0))$.
- **Amplitud**: $A = \sqrt{(x_0^2 + (v_0x^2/v^2))}$.

Estrategia para Resolver Problemas 14.1 (Movimiento Armónico Simple I: Descripción del Movimiento):

1. **IDENTIFICAR**: Asegurarse de que el sistema oscilante sea MAS (fuerza de restitución proporcional al desplazamiento).
2. **PLANTEAR**:
    - Identificar cantidades conocidas y desconocidas.
    - Distinguir entre propiedades básicas del sistema (m, k, T, f, v) y propiedades del movimiento (A, v_máx, ϕ, x, vx, ax en un instante dado).
    - Definir un eje x con el equilibrio en x = 0.
3. **EJECUTAR**:
    - Usar las ecuaciones de las secciones 14.1 y 14.2.
    - Para x, vx, ax en función del tiempo: usar (14.13), (14.15), (14.16).
    - Para A y ϕ de x_0 y v_0x: usar (14.18) y (14.19).
    - Considerar casos especiales: $v_0x = 0$ ($A = x_0$, $\phi = 0$) o $x_0 = 0$ ($A = v_0x/v$, $\phi = -\pi/2$). Todos los ángulos de fase en radianes.
4. **EVALUAR**: Comprobar la coherencia de los resultados (ej., sustituir t=0).

Ejemplo 14.3 (Descripción del MAS):

- Dados: k = 200 N/m, m = 0.50 kg (del Ejemplo 14.2), $x_0 = +0.015$ m, $v_0x = +0.40$ m/s.
- Periodo T y frecuencia angular v son los mismos del Ejemplo 14.2 (T = 0.31 s, v = 20 rad/s).
- Cálculo de $A = \sqrt{((0.015 \text{ m})^2 + (0.40 \text{ m/s})^2 / (20 \text{ rad/s})^2)} = 0.025$ m.
- Cálculo de $\phi = \arctan(-(0.40 \text{ m/s}) / (20 \text{ rad/s} * 0.015 \text{ m})) = -53^\circ = -0.93$ rad.
- Ecuaciones:
    - $x = (0.025 \text{ m}) \cos((20 \text{ rad/s})t - 0.93 \text{ rad})$.
    - $vx = -(0.50 \text{ m/s}) \text{sen}((20 \text{ rad/s})t - 0.93 \text{ rad})$.
    - $ax = -(10 \text{ m/s}^2) \cos((20 \text{ rad/s})t - 0.93 \text{ rad})$.

3. Energía en el Movimiento Armónico Simple

En el MAS, la **energía mecánica total (E)** se conserva, ya que la fuerza del resorte es conservativa y no hay fuerzas no conservativas.

- $E = K + U = (1/2)mv_x^2 + (1/2)kx^2 = \text{constante}$.
- La energía mecánica total también se relaciona directamente con la **amplitud A**:
    - En $x = A$ (o $-A$), $v_x = 0$, por lo que toda la energía es potencial: $E = (1/2)kA^2$.
    - Esto implica que $E = (1/2)mv_x^2 + (1/2)kx^2 = (1/2)kA^2$ para cualquier punto del movimiento.

Velocidad en cualquier desplazamiento x:

- $v_x = \pm\sqrt{(k/m)} * \sqrt{(A^2 - x^2)}$.
    - La rapidez máxima ($v_{máx}$) ocurre en $x = 0$: $v_{máx} = \sqrt{(k/m)} * A = vA$.

Interpretación de E, K y U:

- La **energía potencial (U)** es parabólica ($U = (1/2)kx^2$), mientras que la **energía mecánica total (E)** es una línea horizontal constante.
- La **energía cinética (K)** es la diferencia vertical entre E y U ($K = E - U$).
- En $x = \pm A$, toda la energía es potencial y $K = 0$.
- En $x = 0$, toda la energía es cinética y $U = 0$.
- La energía se transforma continuamente entre potencial y cinética.

Estrategia para Resolver Problemas 14.2 (Movimiento Armónico Simple II: Energía):

- Cuando el problema implica una relación entre **posición, velocidad y aceleración sin referencia al tiempo**, es útil usar la ecuación (14.4) ($a_x = -(k/m)x$) o (14.21) ($E = (1/2)mv_x^2 + (1/2)kx^2 = (1/2)kA^2$).
- Inferir los signos de x y v_x según la situación.

Ejemplo 14.4 (Velocidad, Aceleración y Energía en el MAS):

- Dados: $A = 0.020$ m, $k = 200$ N/m, $m = 0.50$ kg (del Ejemplo 14.2).
- **a) Rapidez máxima**: $v_{máx} = \sqrt{(k/m)} * A = 20$ rad/s $* 0.020$ m $= 0.40$ m/s. Velocidades máxima y mínima: ± 0.40 m/s en $x = 0$.
- **b) Aceleraciones máxima y mínima**: $a_{máx} = -(k/m)x$. $a_{máx} = -(200/0.50)*(-0.020$ m$) = 8.0$ m/s^2 en $x = -A$. $a_{mín} = -8.0$ m/s^2 en $x = +A$.
- **c) Velocidad y aceleración en $x = A/2 = 0.010$ m**:
  - $v_x = -\sqrt{(k/m)} * \sqrt{(A^2 - x^2)} = -\sqrt{(200/0.50)} * \sqrt{((0.020)^2 - (0.010)^2)} = -0.35$ m/s (negativa porque se mueve hacia el equilibrio).
  - $a_x = -(k/m)x = -(200/0.50)*(0.010$ m$) = -4.0$ m/s^2.
- **d) Energías en $x = A/2$**:
  - $E = (1/2)kA^2 = (1/2)(200)(0.020)^2 = 0.040$ J.
  - $U = (1/2)kx^2 = (1/2)(200)(0.010)^2 = 0.010$ J.
  - $K = (1/2)mv_x^2 = (1/2)(0.50)(-0.35)^2 = 0.030$ J.
  - Verificación: $U + K = 0.010$ J $+ 0.030$ J $= 0.040$ J $= E$.

Ejemplo 14.5 (Energía y Momento Lineal en el MAS): Este ejemplo explora cómo cambia la amplitud y el periodo cuando la masa de un sistema oscilante es modificada, considerando la conservación de energía y momento lineal. Es clave analizar si la colisión ocurre en el punto de equilibrio (donde la energía es puramente cinética, y se conserva el momento lineal horizontal, pero se pierde energía cinética) o en el extremo de la trayectoria (donde la energía es puramente potencial, no hay movimiento, y no se pierde energía mecánica).

---

4. Aplicaciones del Movimiento Armónico Simple

El MAS puede presentarse en cualquier sistema con una fuerza de restitución proporcional al desplazamiento.

MAS Vertical:

- Un cuerpo colgando de un resorte vertical también oscila en MAS.
- La **frecuencia angular es la misma** que en el MAS horizontal ($v = \sqrt{(k/m)}$).

- La única diferencia es que la posición de equilibrio ($x = 0$) ya no es donde el resorte está sin estirar, sino donde la fuerza del resorte equilibra el peso ($k\Delta l = mg$).

MAS Angular:

- Sistemas rotacionales como la **rueda de balance de un reloj mecánico**.
- Una torca de restitución (τz) es proporcional al desplazamiento angular (θ): $\tau z = -\kappa \theta$ (donde κ es la constante de torsión).
- La ecuación de movimiento es $I(d^2\theta/dt^2) = -\kappa \theta$.
- La **frecuencia angular (v)** y la **frecuencia (f)** se dan por:
  - $v = \sqrt{(\kappa/I)}$.
  - $f = (1/(2\pi)) * \sqrt{(\kappa/I)}$.
  - Θ es la amplitud angular.

Vibraciones de Moléculas:

- En ciertas interacciones atómicas (ej., Van der Waals), si el desplazamiento x es pequeño comparado con la distancia de equilibrio R_0, la fuerza de restitución puede aproximarse a la ley de Hooke ($Fx = -kx$).
- Esto significa que las oscilaciones moleculares pueden ser MAS para pequeñas amplitudes.
- La constante de fuerza $k = 72U_0/R_0^2$.

Ejemplo 14.6 (MAS Vertical en un Automóvil Viejo):

- Se calcula la constante de fuerza del automóvil $k = 980\ N / 0.028\ m = 3.5 * 10^4\ N/m$.
- La masa total $m = 1000\ kg\ (auto) + 100\ kg\ (persona) = 1100\ kg$.
- Periodo $T = 2\pi\sqrt{(m/k)} = 2\pi\sqrt{(1100\ kg / 3.5 * 10^4\ N/m)} = 1.11\ s$.
- Frecuencia $f = 1/T = 0.90\ Hz$.

---

5. El Péndulo Simple

Un **péndulo simple** es un modelo idealizado: una masa puntual suspendida de una cuerda inexpansible y sin masa.

Análisis del movimiento:

- La trayectoria es un arco de círculo.
- La fuerza de restitución (tangencial) es $Fu = -mg\ sen(\theta)$.
    - Dado que es proporcional a $sen(\theta)$ y no a θ, el movimiento **no es estrictamente MAS**.

Aproximación de Amplitud Pequeña:

- Para ángulos θ pequeños, $sen(\theta) \approx \theta$ (en radianes).
- Con esta aproximación, la fuerza de restitución se convierte en $Fu = -mg(x/L) = -(mg/L)x$ (donde $x = L\theta$).
- La constante de fuerza efectiva es $k = mg/L$.
- **Frecuencia Angular (v)**: $v = \sqrt{}(k/m) = \sqrt{}(mg/L\ /\ m) = \sqrt{}(g/L)$.
- **Frecuencia (f)**: $f = (1/(2\pi)) * \sqrt{}(g/L)$.
- **Periodo (T)**: $T = 2\pi * \sqrt{}(L/g)$.
- **Independencia de la Masa**: La masa m se anula de las expresiones de T y f.
- **Dependencia de L y g**: Un péndulo largo tiene un periodo más largo. Un g mayor resulta en una mayor frecuencia y un periodo menor.

Periodo para Amplitud No Pequeña:

- Para amplitudes mayores, el periodo real es más largo. La ecuación (14.35) es una serie infinita para calcular el periodo con mayor precisión.

Ejemplo 14.8 (Un Péndulo Simple):

- Para $L = 1.000$ m y $g = 9.800\ m/s^2$:
    - $T = 2\pi \sqrt{}(L/g) = 2\pi \sqrt{}(1.000\ m\ /\ 9.800\ m/s^2) = 2.007$ s.
    - $f = 1/T = 0.4983$ Hz.

---

6. El Péndulo Físico

Un **péndulo físico** es cualquier cuerpo de tamaño finito que oscila alrededor de un eje de rotación.

- El centro de gravedad (cg) está a una distancia d del pivote.
- El peso mg causa una **torca de restitución**: $\tau z = -(mgd)\text{sen}(\theta)$.
- Para ángulos θ pequeños ($\text{sen}(\theta) \approx \theta$), el movimiento es **MAS angular**.
- La ecuación de movimiento es $I(d^2\theta/dt^2) = -(mgd)\theta$.
- Comparando con $I(d^2\theta/dt^2) = -\kappa\theta$ (MAS angular), la constante de torsión efectiva es $\kappa = mgd$.
- **Frecuencia Angular (v)**: $v = \sqrt{(mgd/I)}$.
- **Periodo (T)**: $T = 2\pi\sqrt{(I/(mgd))}$.
    - I es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación.

Utilidad: Este método se usa para determinar experimentalmente el momento de inercia de cuerpos complejos.

Ejemplo 14.9 (Péndulo Físico contra Péndulo Simple):

- Varilla uniforme de longitud L, pivotada en un extremo.
- $I = (1/3)ML^2$.
- $d = L/2$ (distancia del pivote al centro de gravedad).
- $T = 2\pi\sqrt{((1/3)ML^2 / (MgL/2))} = 2\pi\sqrt{(2L/(3g))}$.

---

7. Oscilaciones Amortiguadas

En el mundo real, las fuerzas disipativas (como la fricción) causan una disminución de la amplitud de las oscilaciones con el tiempo, un fenómeno llamado **amortiguamiento**.

Fuerza de Amortiguamiento:

- Caso sencillo: fuerza de fricción proporcional a la velocidad: $Fx = -bvx$.
    - b es una constante de amortiguamiento que describe la intensidad.
- La segunda ley de Newton para un oscilador amortiguado es: $max = -kx - bvx$.

Solución para Oscilador con Poco Amortiguamiento (Subamortiguamiento):

- $x(t) = A\, e^{(-(b/2m)t)} \cos(v't + \phi)$.
    - La amplitud $A\, e^{(-(b/2m)t)}$ disminuye exponencialmente con el tiempo.
    - La **frecuencia angular (v')** es ligeramente menor que la frecuencia natural no amortiguada ($v = \sqrt{(k/m)}$).
    - $v' = \sqrt{(k/m - b^2/(4m^2))}$.

Tipos de Amortiguamiento:

- **Subamortiguamiento**: $b < 2\sqrt{(km)}$. El sistema oscila con amplitud decreciente.
- **Amortiguamiento Crítico**: $b = 2\sqrt{(km)}$. El sistema no oscila y regresa a su posición de equilibrio sin sobrepasarla, en el menor tiempo posible.
- **Sobreamortiguamiento**: $b > 2\sqrt{(km)}$. El sistema no oscila y regresa al equilibrio más lentamente que con amortiguamiento crítico.

Energía en Oscilaciones Amortiguadas:

- La fuerza de amortiguamiento no es conservativa, por lo que la energía mecánica total (E) **no es constante**; disminuye continuamente.
- La tasa de cambio de energía es: $dE/dt = -bvx^2$.
    - Esto es igual a la potencia negativa de la fuerza amortiguadora, indicando que se disipa energía del sistema.

---

8. Oscilaciones Forzadas y Resonancia

Para mantener una oscilación de amplitud constante en un sistema amortiguado, se debe aplicar una **fuerza impulsora** que varíe periódicamente.

Oscilación Forzada:

- Cuando se aplica una fuerza impulsora periódica (ej., $F(t) = F_máx \cos(v_d\ t)$) a un oscilador armónico amortiguado.

- La **frecuencia angular de la masa oscilante es igual a la frecuencia angular de la fuerza impulsora (v_d)**, no necesariamente igual a la frecuencia natural (v') del sistema sin impulsión.

Resonancia:

- Ocurre cuando la amplitud de la oscilación forzada alcanza un pico marcado.
- Esto sucede cuando la **frecuencia angular impulsora (v_d) se acerca a la frecuencia angular de oscilación natural (v')** del sistema (o $v = \sqrt{(k/m)}$ si el amortiguamiento es muy pequeño).
- Cuanto menor sea el amortiguamiento (b pequeña), más alto y estrecho será el pico de resonancia.
- La amplitud (A) de un oscilador impulsado se describe por la ecuación:
  - $A = F_{máx} / \sqrt{((k - m v_d^2)^2 + b^2 v_d^2)}$.

Consecuencias de la Resonancia:

- Puede ser beneficiosa (ej., seleccionar una estación de radio, perros jadeando para enfriarse).
- Puede ser destructiva (ej., soldados marchando sobre un puente, vibraciones en alas de aviones).

Resumen del Capítulo 14 (Síntesis)

El resumen del capítulo reafirma los conceptos clave:

- **Movimiento Periódico**: Repetición en ciclos, con periodo T, frecuencia f, y frecuencia angular v.
- **MAS**: Fuerza de restitución $F_x = -kx$. Aceleración $a_x = -(k/m)x$. Frecuencia angular $v = \sqrt{(k/m)}$. Periodo $T = 2\pi\sqrt{(m/k)}$. Desplazamiento $x = A\cos(vt + \phi)$.
- **Energía en MAS**: Conservada, $E = (1/2)mv_x^2 + (1/2)kx^2 = (1/2)kA^2$.
- **MAS Angular**: Frecuencia angular $v = \sqrt{(\kappa/I)}$.

- **Péndulo Simple**: MAS aproximado para amplitud pequeña, $v = \sqrt{(g/L)}$, $T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$.
- **Péndulo Físico**: MAS aproximado para amplitud pequeña, $v = \sqrt{(mgd/I)}$, $T = 2\pi\sqrt{(I/(mgd))}$.
- **Oscilaciones Amortiguadas**: Fuerza de amortiguamiento $F_x = -bv_x$. Amplitud decreciente $x = A\, e^{(-(b/2m)t)} \cos(v't + \phi)$.
- **Oscilaciones Impulsadas y Resonancia**: Fuerza impulsora periódica. Amplitud máxima (resonancia) cuando la frecuencia impulsora se acerca a la frecuencia natural del sistema.

Estrategias Adicionales y Ejercicios

El capítulo ofrece dos estrategias detalladas para resolver problemas de MAS:

- **MAS I: Descripción del Movimiento** (ya detallada arriba).
- **MAS II: Energía** (ya detallada arriba).